Nouvelles méthodes de calcul qualitatif

Jean-Luc Dormoy
Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France
IMA-TIEM
1, avenue du Général de Gaulle
92141 Clamart CEDEX
France

RESUME. *Un calcul qualitatif basé sur les signes a été tout d'abord développé par les économistes pour surmonter une difficulté majeure : on est souvent confronté à une absence de données quantitatives. Certaines méthodes, comme la statique comparative, ont été proposées pour résoudre des problèmes basés sur des modèles qualitatifs.*

Un nouvel intérêt pour les méthodes qualitatives est récemment apparu dans les domaines du contrôle de processus, de l'automatique et de l'intelligence artificielle, notamment dans ce qu'on appelle la physique qualitative. De nouvelles approches, comme le raisonnement sur les ordres de grandeur, ont étendu le champ de "ce qu'est le qualitatif". Par delà certains aspects spécifiques à ces différents domaines - par exemple représenter comment les êtres humains raisonnent sur le comportement d'un système est un centre d'intérêt majeur de l'Intelligence Artificielle - cela a conduit à de nouveaux résultats et méthodes pour traiter les modèles qualitatifs. Ces résultats sont susceptibles d'application dans ces divers cadres, y compris le contrôle de processus, l'automatique ou l'économie.

Ce papier discute de ces nouveaux aspects théoriques du calcul qualitatif. Nous espérons qu'il offrira une meilleure vue sur ces questions et qu'il contribuera à l'émergence d'une théorie générale de "ce qu'est le qualitatif".

1. Introduction

Le terme *qualitatif* est utilisé par les économistes depuis plus de quarante ans en tant que synonyme *de raisonner sur les signes*. Un nouvel intérêt pour les techniques qualitatives est récemment apparu dans d'autres domaines, tels que l'automatique et l'intelligence artificielle. La première étape a consisté à développer des modèles, outils et techniques pour raisonner dans l'espace de quantités qualitatives {+,0,-,?}. Cela a conduit à de nouveaux résultats, que nous présenterons dans la seconde partie de cet article. Parmi eux, un résultat important aussi bien sur les plans théorique que pratique semble être l'existence d'une *règle de résolution qualitative* (ainsi appelée à cause de sa ressemblance - y compris un résultat de complétude - avec la résolution en logique).

Cependant, ce travail ne se limite pas à poursuivre la tâche commencée par les économistes. De nouveaux cadres ont été développés pour prendre en compte d'autres idées intuitives de ce qui peut se ranger sous le terme qualitatif, par exemple le raisonnement sur les ordres de grandeur. Nous faisons une présentation générale de ces modèles dans la troisième partie. Tous possèdent une même propriété : une règle de résolution peut toujours s'y appliquer. Par delà cette coïncidence, il doit y avoir une structure algébrique unifiante. Nous essayons actuellement de nous demander en quoi elle peut consister.

2. L'Algèbre qualitative standard

2.1. Confluences

Considérons un système très simple : un tuyau (Fig. 1).

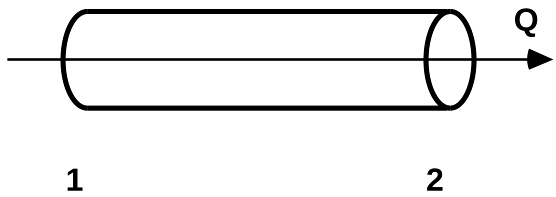


Figure 1 : Un tuyau

Un modèle simple du comportement d'un fluide coulant dans le tuyau est donné par l'équation

$$Q = CA(2P/\rho)^{1/2} \tag{1}$$

où Q est le flux à travers le tuyau, P la différence de pression entre les extrémités du tuyau, A la section du tuyau, C le coefficient de décharge et ρ la densité massique du fluide. Des déductions simples comme *"Si Q augmente alors que A et r ne changent pas, alors P augmente également"* sont évidentes. C'est ce que les *équations qualitatives*, ou *confluences*, tentent de prendre en compte.

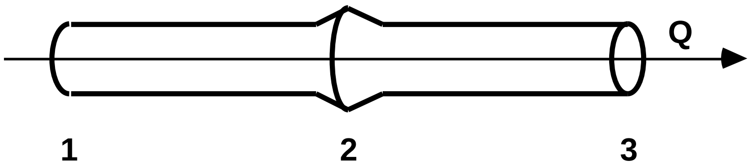
Une confluence est une relation reliant des signes. Par exemple, la confluence pour le tuyau - lorsque ρ est supposé constante - est

?P - ?Q + ?A ˜ 0 (2)

Les définitions formelles de ce qui est impliqué ici sont données ensuite. Cependant, ce que nous voulons intuitivement dire est tout à fait clair. Par exemple, supposer que Q augmente et A reste constante est équivalent à ?Q=+ and ?A=0. En substituant ces valeurs dans Eq. (2), nous obtenons :

?P - [+] + [0] ˜ 0 (3)

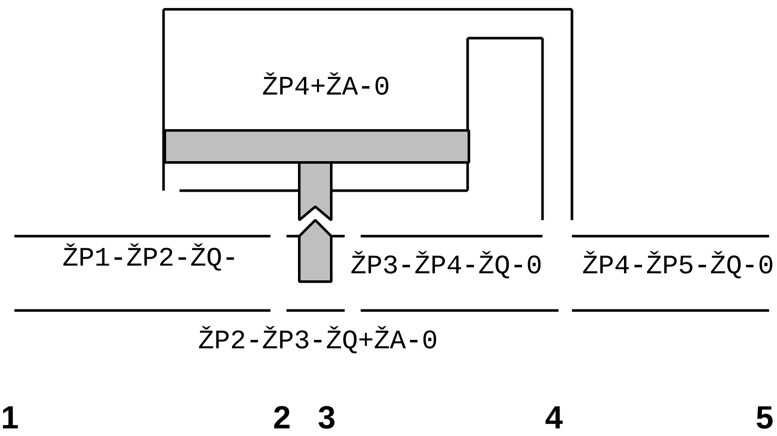
Ce genre de modèle peut être étendu à des systèmes moins simplistes - bien que nous ne considérerons que des exemples très simples dans ce papier. On peut par exemple construire un modèle pour un système constitué de divers composants à partir des modèles des types des composants. Par exemple, Eq. (4) et Eq. (5) forment un modèle qualitatif de deux tuyaux reliés, et Eq. (6) à Eq. (10) forment un modèle qualitatif pour le régulateur de pression de la Fig. 3.



$?P_1 - ?P_2 - ?Q$ ˜ 0 (4)

$?P_2 - ?P_3 - ?Q$ ˜ 0 (5)

Figure 2 : Deux tuyaux reliés



$?P_1 - ?P_2 - ?Q$ ˜ 0 (6)

$?P_2 - ?P_3 - ?Q + ?A$ ˜ 0 (7)

$?P_3 - ?P_4 - ?Q$ ˜ 0 (8)

$?P_4 - ?P_5 - ?Q$ ˜ 0 (9)

$?P_4 + ?A$ ˜ 0 (10)

Figure 3 : Le régulateur de pression.

Ce genre de modèle est connu et étudié par les économistes depuis plus de quarante ans (voir par exemple Lancaster (1966); Jeffries, Klee & Van den Driessch (1977); Ritschard (1983)). Cependant, des chercheurs travaillant dans les domaines de l'automatique et de l'intelligence artificielle ont développé de nouvelles techniques pour traiter ce genre de raisonnement. Nous allons les présenter maintenant.

2.2. Les modèles qualitatifs basés sur les signes

Nous devons correctement définir nos notations algébriques. Dans le calcul qualitatif basé sur les signes, on considère l'ensemble S={+,0,-,?}. L'élément ? dans l'ensemble S est nécessaire pour définir l'addition : par exemple, (+)+(-) est défini comme étant ?. L'addition et la multiplication sont définies dans la Table 1. [x] désigne le signe du réel x.

+	0	+	-	?
0	0	+	-	?
+	+	+	?	?
-	-	?	-	?
?	?	?	?	?

*	0	+	-	?
0	0	0	0	0
+	0	+	-	?
-	0	-	+	?
?	0	?	?	?

Table 1 : L'addition et la multiplication des signes

Alors que le symbole = désigne l'égalité usuelle, nous définissons ˜ sur S comme suit : pour tout a et b de S, a˜ b si et seulement si a=b ou a=? ou b=?. La relation ˜ est appelée *compatibilité des signes* ou *égalité qualitative*. Les propriétés de base de ces notions sont données dans Dormoy (1987).
-s, où s est un élément de S, est une notation pour (-)*s.

2.3. Systèmes linéaires qualitatifs

Un système d'équations qualitatives ne mentionnant pas à la fois le signe d'une quantité physique et de sa dérivée est appelé un *système linéaire qualitatif* (SLQ). Si une quantité et une de ses dérivées apparaissent, alors on a affaire à un *système différentiel linéaire qualitatif* (SDLQ).
Vecteurs et matrices qualitatifs sont clairement définis. Tous les coefficients de vecteurs ou de matrices qualitatives apparaissant dans un SLQ sont dans DS={+,0,-}. Deux vecteurs ou matrices de la même taille sont qualitativement égaux si et seulement si leurs composantes respectives le sont. Cette relation sera également notée ˜ .

Il faut aborder tout d'abord les questions les plus simples. Les systèmes différentiels qualitatifs sont un problème difficile sur lequel travaillent actuellement de nombreux chercheurs en physique qualitative (voir aussi sur les problèmes de stabilité qualitative Jeffries, Klee & Van den Driessch (1977)). On se restreindra dans cet article aux systèmes linéaires qualitatifs.

Nous noterons un SLQ sous forme matricielle AX˜ B. Celui-ci provenant d'une situation physique, et X étant donc le vecteur des signes des quantités physiques décrivant le système, X ne peut avoir de composante ?. Résoudre ce SLQ consiste donc à trouver tous les vecteurs qualitatifs X sans composante valant ? et satisfaisant les équations.

2.4. Le lien entre qualitatif et quantitatif

Si nous considérons un système linéaire réel A'X'=B', alors la relation [A'][X']˜ [B'] est vérifiée pour toute solution du système réel. Si l'on se limite aux systèmes *linéaires* réels, la réciproque est vraie dans le sens suivant (Travé & Kaszkurewicz, 1986a 1986b; Dormoy, 1987) :

> *Soit X_0 une solution du SLQ AX˜ B. Alors, pour tout vecteur réel X'_0 dont les signes des composantes correspondent à X_0, il y a une matrice A' et un vecteur B' dont les signes des composantes sont ceux de A et B respectivement, tels que $A'X'_0=B'$.*

Cette propriété est importante sur le plan théorique : elle établit que si nous ne connaissons que les signes des coefficients d'un système linéaire réel, alors toute l'information que nous pouvons en tirer est contenue dans le système qualitatif correspondant. Cela n'est pas vrai pour d'autres modèles qualitatifs (par exemple les *algèbres d'intervalles*, cf. plus loin la partie *Modèles qualitatifs non standards* et Struss (1987)).

Dans la pratique, nous avons le plus souvent des systèmes réels non linéaires. Mais même dans ce cas, le comportement qualitatif est décrit par un système *linéaire* qualitatif. C'est un grand avantage des modèles qualitatifs : passer du quantitatif au qualitatif linéarise les systèmes. Malheureusement, même si toute solution réelle fournit une solution qualitative, l'inverse n'est pas vrai en général. Cette question n'a pas été approfondie à ce jour.

2.5. Modèles stationnaires

En général, les quantités physiques caractérisant un système physiques se répartissent en deux classes : les variables *endogènes* et les variables *exogènes*. Les premières décrivent l'état interne du système, les secondes traduisant l'action du monde extérieur sur le système. Lorsque l'on fait une simulation du système, on tentera pour des valeurs données des variables exogènes, c'est-à-dire pour une perturbation donnée du monde extérieur, de calculer les valeurs des variables endogènes, c'est-à-dire la réponse ou le comportement du système. Dans certains cas, la distinction entre variables exogènes et endogènes peut dépendre du point de vue d'où l'on se place. Ainsi, si l'on fait du diagnostic, on peut être conduit à observer certaines variables endogènes, et à tenter d'en déduire les valeurs des variables exogènes qui ont créé cet état. Traduits sous forme d'équations, ces différents problèmes prendront cependant la même forme. Certaines variables seront les entrées du système, et on tentera de calculer les valeurs des autres variables, soit les sorties.

Plaçons-nous pour notre propos dans le cas de la simulation. On dira qu'un système physique est stationnaire si, lorsqu'aucune variable exogène n'est modifiée, aucune variable endogène ne l'est non plus. Autrement dit, si rien ne bouge à l'extérieur, le système ne présente aucune variation de son état interne. Si le système physique est décrit par un SLQ AX˜ B, où X est le vecteur des variables endogènes et B représente l'action des variables exogènes, la propriété de stationnarité se traduit par :

"Si B=0, alors X=0 est la seule solution du SLQ."

Lorsqu'un SLQ vérifie cette propriété, on le qualifiera de *stationnaire*. On prendra par ailleurs comme critère qu'un SLQ est un "bon modèle qualitatif" lorsqu'il est stationnaire. Ce qui suit montre l'importance de cette notion.

2.6. Composantes dures

Pour tout système linéaire réel, il y a trois possibilités mutuellement exclusives :

- il n'y a pas de solution,
- il y a une solution unique,
- il y a un nombre infini de solutions.

En particulier, le problème d'unicité est posé en termes d'un vecteur solution global.

Considérons maintenant les deux tuyaux reliés de la partie *Confluences* précédente. Sous les hypothèses ?P_1=?P_3=+, on peut montrer que ?P_2=+. Mais ?Q reste ambigu. L'ambiguïté est une caractéristique bien connue des modèles qualitatifs. Elle ne concerne cependant pas nécessairement le vecteur solution tout entier : certaines composantes peuvent être parfaitement déterminées alors que d'autres restent ambiguës.

Le cas qualitatif est donc radicalement différent du cas quantitatif. La notion de *composante dure*, à savoir une composante de X parfaitement déterminée par l'ensemble des confluences, s'avère être cruciale.

Il a été prouvé (Dormoy, 1987) que, lorsqu'au moins un vecteur solution existe, il y a exactement trois possibilités pour chaque composantes :

1) c'est une composante dure,
2) + et - sont solutions, mais 0 ne l'est pas,
3) +, 0 et - sont solutions.

2.7. Rang qualitatif

Un "bon" modèle quantitatif est constitué d'équations indépendantes. Une notion d'indépendance qualitative a été définie dans Travé & Kaszkurewicz (1986a 1986b) :

Soient $V_1,...,V_n$ des vecteurs qualitatifs de la même taille. On dira qu'ils sont indépendants si et seulement si pour tous $a_1,...,a_n$ tous différents de ?, la relation $a_1V_1+...+a_nV_n$˜ 0 entraîne $a_1=...=a_n=0$.

Le rang d'une matrice qualitative est défini comme le nombre maximum de vecteurs-colonnes indépendants. On dit que A est une matrice de rang plein si ses vecteurs-colonnes sont indépendants. A est une matrice de rang plein si et seulement si le SLQ AX˜ 0 a la solution globale unique X=0, autrement dit s'il est stationnaire. Le résultat qui suit relie les notions de rang et de composante dure (Travé & Kaszkurewicz, 1986a 1986b; Dormoy, 1987) :

Soit AX˜ B un SLQ ayant une composante dure x_j. Alors il y a un sous-système de rang plein contenant x_j.

Cela prouve qu'il n'y a aucun espoir de trouver une composante dure pour un système non stationnaire sans sous-système stationnaire.

2.8. Déterminant qualitatif

Il s'avère que les notions et les résultats qui précèdent sont, pour les systèmes carrés, en relation avec le *déterminant qualitatif*. Le déterminant qualitatif d'une matrice qualitative carrée peut être calculé comme dans le cas réel (Dormoy, 1987).

Rang plein et déterminant. Soit A une matrice qualitative carrée. A n'est pas de rang plein si et seulement si Det(A)˜ 0.

Formules de Cramer qualitatives. Soit AX˜ B un SLQ carré tel que Det(A)?0, et x_j la $j^{ème}$ composante de X. Soit $A_{j/B}$ la matrice déduite de A en substituant le vecteur B à sa $j^{ème}$ colonne, et Det($A_{j/B}$) son déterminant. Supposons que la matrice A n'est pas décomposable, i.e. ne peut prendre après une permutation quelconque de ses lignes et colonnes la forme (A_1 et A_2 sont des matrices carrées):

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{bmatrix}$$

Alors:

- le SLQ AX˜ B a au moins une solution.
- l'ensemble des solutions pour x_j est donné par:

Det(A) \ $Det(A_{j/B})$	+ or -	?
+ or -	$\{Det(A_{j/B}).Det(A)\}$	{+,0,-}
?	{+,-}	{+,0,-}

2.9. La règle de résolution

Découvrir les composantes dures d'un SLQ est crucial pour deux raisons:

- cela nous permet de connaître les quantités physiques non ambiguës.
- cela réduit considérablement l'espace de recherche de toutes les solutions.

La version qualitative de la formule de Cramer est apparemment un outil pour cette tâche. Elle est cependant limitée aux systèmes carrés, mais la raison principale pour laquelle elle n'est pas d'un usage pratique est qu'elle nécessite une quantité énorme de calculs.

En fait, un outil effectif de calcul est fourni par la règle de résolution (Dormoy, 1987; Dormoy & Raiman, 1988) :

Règle de résolution qualitative.

Soient x, y, z, a, b des quantités qualitatives telles que
x + y ˜ a
et - x + z ˜ b
Si x est différent de ?, alors
y + z ˜ a + b

En pratique, cette règle signifie qu'une variable peut être éliminée en faisant la somme ou la différence de deux équations, pourvu qu'aucune autre variable ne soit éliminée en même temps.

Considérons une nouvelle fois les deux tuyaux connectés de la Fig. 2.1.. La variable $?P_2$ peut être éliminée en faisant la somme de Eq. (4) et Eq. (5):

$?P_1 - ?P_2 - ?Q$ ˜ 0 (4)

$?P_2 - ?P_3 - ?Q$ ˜ 0 (5)

\------------------------

$?P_1 - ?P_3 - ?Q \tilde{} \ 0$ (11)

= (4) + (5)

Cela prouve que ?Q est une composante dure dès que $?P_1 - ?P_3$? ?. On peut remarquer que Eq. (11) est une description des deux tuyaux reliés pris comme un tout, et qui montre que les deux tuyaux reliés se comportent comme un tuyau unique.

De la même manière, nous obtenons en soustrayant Eq. (5) de Eq. (4) :

$?P_1 - ?P_2 + ?P_3 \tilde{} \ 0$ (12)

= (4) - (5)

Cela signifie que $?P_2$ est une composante dure lorsque $?P_1 + ?P_3$? ?.

Il peut être prouvé dans le cas carré (Dormoy, 1987) que la règle de résolution est *complète* en ce qui concerne le problème des composantes dures : si une variable quelconque x est une composante dure, la règle de résolution le découvre et détermine la valeur de x.

La règle de résolution est un outil fondamental pour résoudre les SLQs. Elle fournit un équivalent pour les SLQs de l'élimination gaussienne dans les espaces vectoriels. Un ensemble d'heuristiques peut être défini pour efficacement contrôler dans les cas pratiques le processus de recherche des composantes dures utilisant la règle de résolution (Dormoy, 1987, 1988). Elles permettent à la résolution qualitative de ne pas subir le sort de la résolution en logique.

Il y a un autre aspect. Nous pensons que cette règle est probablement d'une grande importance théorique. Il existe d'autres versions de la règle de résolution dans d'autres cadres algébriques qualitatifs. Nous les décrivons dans la partie qui suit *Modèles qualitatifs non standards* (où nous expliquons par ailleurs pourquoi nous utilisons le terme résolution). Le résultat de complétude mentionné auparavant corrobore cette impression.

2.10. Composantes "douces"

Quand toutes les solutions d'un SLQ doivent être déterminées, la règle de résolution résout seulement une partie du problème. Par contre, elle ne dit rien sur les composantes "douces", c'est-à-dire les variables ambiguës. Plusieurs algorithmes ont été proposés pour résoudre ce problème (De Kleer & Brown, 1984; Travé & Kaszkurewicz, 1986a 1986b). Mais pour autant que nous le sachions, la structure de l'ensemble des solutions d'un SLQ n'a pas été sérieusement explorée à ce jour. Il nous semble que cela permettrait des améliorations importantes de ces algorithmes.

3. Modèles qualitatifs non standards

Nous avons montré en détail dans la partie précédente quelques propriétés des modèles qualitatifs basés sur les signes. Nous montrons maintenant comment on peut modéliser d'autres notions intuitives.

3.1. Ordres de grandeur

Un modèle pour les ordres de grandeur a été décrit pour la première fois par Olivier Raiman (1986). Il utilise trois relations entre quantités : négligibilité, proximité, comparabilité. Nous présentons ici un modèle affaibli, qui étend celui basé sur les signes. Les relations de négligibilité et de comparabilité sont conservées, mais la relation de proximité est absente. Donner une description complète de ce modèle est nécessaire, bien que quelque peu pénible.

Soit (I,+,=) un groupe commutatif totalement ordonné (par exemple le groupe additif des entiers relatifs (Z,+,=)). Soit e_i, $i \in I$, des objets mutuellement distincts. Nous considérons l'ensemble $S^* = \{+e_i, -e_i, ?e_i\}_{i \in I} \approx \{0\}$. Les e_i représentent les ordres de grandeur, et les éléments de S^* sont des "ordres de grandeur signés". Chaque élément de S^* différent de 0 peu s'écrire de manière unique sous la forme se_i, où $s \in S$ et $i \in I$. De plus, $0e_i$ peut être identifié à 0, ce qui est cohérent avec la définition de la multiplication qui suit. L'addition, la multiplication et l'égalité qualitatives sont définies sur S^* de la manière suivante :

Addition.

Soient s_1, s_2 deux éléments de S, tous deux différents de 0.
Soient i, j deux éléments de I.

$s_1e_i + s_2e_j = s_1e_i$ si $i > j$
$= s_2e_j$ si $i < j$
$= (s_1+s_2)e_i$ si $i = j$, où s_1+s_2 représente l'addition de s_1 et s_2 dans S.

Soit x un élément de S^*. Alors $x + 0 = 0 + x = 0$

Multiplication.

Soient s_1, s_2 deux éléments de S et i, j deux éléments de I.
$s_1e_i . s_2e_j = (s_1.s_2)(e_{i+j})$, où $s_1.s_2$ représente le produit de s_1 et s_2 dans S.

Egalité qualitative non standard.

Soient s_1, s_2 deux éléments de S, tous deux différents de 0. Soient i, j deux éléments de I.

$s_1e_i \tilde{\ } s_2e_j$ si et seulement si $s_1 = ?$ et $i > j$
ou

s_2 = ? et i < j

ou

s_1 ˜ s_2 et i = j, où s_1 ˜ s_2 signifie "s_1 et s_2 sont qualitativement égaux dans le cas standard".

Soit x un élément de S^*. x ˜ 0 ou 0 ˜ x si et seulement si x=0 ou x est de la forme ?e_i pour un i appartenant à I.

Une rapide justification.

Lorsque l'on soustrait deux quantités ayant le même ordre de grandeur, il est possible d'obtenir une quantité ayant un ordre de grandeur strictement plus petit, de la même manière que lorsque l'on soustrait deux quantités de même signe, on peut obtenir 0. C'est pourquoi ?e_2 est qualitativement égal à e_1 : ?e_2 peut provenir de la soustraction de deux quantités d'ordre de grandeur e_2, et peut être de n'importe quel ordre de grandeur inférieur ou égal à e_2.

Notons 0 l'élément neutre du groupe additif (I,+). se_0 peut être par convention identifié à s pour tout s de S. Cela est cohérent avec nos définitions.

S^* peut être vu comme un empilement infini de copies de S. Chaque niveau correspond à un ordre de grandeur. S est plongé dans cette structure : il est le niveau de base, correspondant à l'ordre de grandeur e_0. S^* et sa structure sont une généralisation de S.

3.2. Propriétés algébriques des ordres de grandeur

Puisque S est plongé dans S*, toute confluence standard est aussi une confluence non standard. La plupart des notions définies dans la partie précédente pour le cadre standard s'appliquent au cas non standard. Le fait le plus intéressant est que la règle de résolution tient sous une certaine forme dans le cas non standard :

Règle de résolution qualitative non standard.

Soient x, y, z, a, b des ordres de grandeur signés tels que :

x + y ˜ a (1)

-*x + z ˜ b* (2)

Si x a la forme se_i *avec s différent de ?, alors :*

y + z ˜ a + b (3) = (1)+(2)

Nous n'avons pas établi de résultat de complétude pour la règle de résolution non standard. Mais nous sommes convaincus qu'il y en a un.

3.3. Algèbres d'intervalles

Les algèbres d'intervalles sont une autre sorte de modèle qualitatif. Ils ont été étudiés avant les ordres de grandeur. Le modèle basé sur les signes est un cas spécial d'algèbre d'intervalles.

La motivation sous-jacente pour l'étude des algèbres d'intervalles est que nous pourrions ne pas connaître la valeur numérique précise d'un coefficient qui nous intéresse, mais les bornes d'un intervalle auquel nous sommes sûrs qu'il appartient. De plus, nous pouvons être intéressés à trouver la position de certaines quantités par rapport à certaines valeurs caractéristiques. Cela justifie les définitions qui suivent.

Considérons un ensemble E muni d'une loi de composition interne ⊥. Nous pouvons définir une loi de composition interne (également notée ⊥) sur P(E), l'ensemble des parties de E, par :

A⊥B={a⊥b; a∈A and b∈B}

Cela nous fournit la définition de l'addition et de la multiplication sur l'ensemble I des intervalles réels. En effet, si nous considérons deux intervalles I et J de R, alors I+J et I*J définis précédemment sont aussi des intervalles. La relation de compatibilité ˜ est définie sur I par :

I˜J si et seulement si I€€€Χονσιδ ρονσ μαιντεναντ υν σουσ−ενσεμβλε J de I, c'est-à-dire que nous nous focalisons sur certains intervalles caractéristiques et pas sur tous. On définit alors :

I⊥ɈJ=Min{K∈J;K€I⊥J}

pourvu que le minimum, pris par rapport l'inclusion, existe. (J,+Ɉ,*Ɉ,˜) est appelé une algèbre d'intervalles. Ce genre de structure est celle que nous devons utiliser lorsque nous sommes intéressés à déterminer la position de quantités par rapport à des valeurs caractéristiques : les intervalles de J sont ceux dont les bornes sont ces valeurs caractéristiques.

Le problème avec les algèbres d'intervalles est qu'elles ont très souvent des propriétés algébriques horribles (au moins pour le mathématicien). Par exemple, il n'y a pas de raison que l'addition soit associative ! Cependant, certains tentatives d'utilisation de ces algèbres ont été menées à bien, par exemple dans le système QSIM de Kuipers (Kuipers, 1984, 1986).

(S,+,*,˜) peut être vue comme une algèbre d'intervalle en posant

+=]0,+ [, 0=[0,0], -=]- ,0[et ?=]- ,+ [.

Certaines propriétés des algèbres d'intervalles peuvent être trouvées dans Struss (1987).

Une règle de résolution peut être énoncée pour les algèbres d'intervalles :

*Soit (J,+Ɉ,*Ɉ,˜) une algèbre d'intervalle, et soient x, y, z, a, b des éléments de J tels que :*

x + y ˜ a

-*x + z ˜ b*

Supposons que J soit stable pour l'intersection (c'est-à-dire que I

y ∔ z Å a ∔ b

3.4. Autres modèles

Dubois et Prade (1988 et ce numéro) ont proposé un nouveau modèle pour le raisonnement sur les ordres de grandeur. La principale différence avec le modèle qui précède ou celui de Raiman est que, lorsque l'on additionne deux quantités "petites", on peut obtenir une quantité qui n'est pas "petite".

Considérons trois objets P (pour petit), M (pour moyen) et G (pour grand). Ils sont sensés représenter les trois intervalles]0,pm[,]pm,mg[and]mg,+ [, mais la valeur des bornes pm et mg sont inconnues. Considérons l'ensemble F constitué de P, M, G, les objets composites PM, MG et + correspondant aux réunions de deux ou trois de ces intervalles adjacents, leur équivalent négatif, et encore les intervalles résultant de la réunion de deux de ces intervalles adjacents. L'addition et la multiplication sont définies sur F par :

> $I \perp_F J$ est l'intervalle minimal K appartenant à F tel que, pour toute valeur de pm et mg, K€I⊥J (où I⊥J est pris dans I).

Par exemple, P+M=M+M=MG, P+G=M+G=G+G=G, ++P=++M=++G=+, ...

Cette définition est différente de celle adoptée pour les algèbres d'intervalles. Elle est essentiellement basée sur le fait que pm et mg sont inconnus. F n'est isomorphe à aucune intervalle d'algèbres.

Comme dans les algèbres d'intervalles, ˜ est définie par :

I˜J si et seulement si I€€€Iλ ψ α υνε νουϖελλε ϖερσιον δε λα ρ γλε δε ρ σολυτιον δανσ χε χοντεξ τε. Λα χονδιτιον συρ ξ πουρ ρενδρε λα ρ γλε αππλιχαβλε εστ θυэιλ δοιτ αππ αρτενιρ λэενσεμβλε {Σ,Λ,Μ,0,–Σ,–Μ,–Λ}, χэεστ– –διρε λэενσεμβλε δεσ λ μεντσ δε F minimaux pour l'inclusion.

3.5. Pourquoi résolution?

Nous n'avons pas encore expliqué pourquoi nous utilisions le terme *résolution*. La règle de résolution qualitative et la règle de résolution en logique (montrée ici dans le cadre du calcul propositionnel) ont un aspect similaire :

> Soient X, Y, Z des variables propositionnelles (et x, y, z leurs équivalents booléens) telles que
>
> X v Y (x + y = 1)
>
> et ¬X v Z (x + z = 1)
>
> Alors
>
> Y v Z (y + z = 1)

Cela n'est en fait pas un hasard. Le calcul booléen est aussi un modèle qualitatif, le plus "pauvre" de tous. Il est bien connu que la règle de résolution y est complète.

3.6. Que veut dire qualitatif?

Nous avons présenté dans cet article différents exemples de modèles pour le raisonnement qualitatif, et certaines de leurs propriétés. La liste n'est certainement pas close, il suffit de considérer ce numéro de la *Revue de l'Intelligence Artificielle* pour s'en convaincre. Nous avons surtout voulu montrer que tous ces modèles d'inspiration algébrique avaient un point commun essentiel : il existe un outil pour y faire des calculs simples à base de substitutions de variables, la règle de résolution. Cela va probablement au-delà de la simple coïncidence. Aussi, une direction de recherche future semble-t-elle être l'unification de ces différents modèles en une structure axiomatique qui capture la notion intuitive de ce qu'est "le qualitatif". L'article de Louise Travé-Massuyès et Nuria Pierra dans ce numéro est un premier pas dans cette direction.

Références

De Kleer, J., and J. S. Brown (1984). A qualitative physics based on confluences. Artificial Intelligence, Vol. 24, n° 1-3, December 1984.

Dormoy, J. L. (1987). Résolution qualitative: complétude, interprétation physique et contrôle. Mise en oeuvre dans un langage à base de règles: BOOJUM (in french). Doctoral Thesis of the Paris 6 University, December 1987.

Dormoy, J. L., and O. Raiman (1988). Assembling a Device. Proceedings of the Seventh National Conference on Artificial Intelligence, AAAI'88, Saint-Paul, Min.

Dormoy, J. L. (1988). Controlling Qualitative Resolution. Proceedings of the Seventh National Conference on Artificial Intelligence, AAAI'88, Saint-Paul, Min.

Dubois, D., and H. Prade (1988). Fuzzy Arithmetic in Qualitative Reasoning. The Third International Workshop "Bellman Continuum", Sophia-Antipolis, France.

Iwasaki, Y., and H. A. Simon (1986). Causality in Device Behavior. Artificial Intelligence, Vol. 29, n° 1, June 1986.

Jeffries, C., V. Klee, and P. Van den Driessch (1977). When is a Matrix Sign Stable? Can.J.Math., Vol. XXIX, n° 2, 1977, 315-326.

Kuipers, B. (1984). Commonsense Reasoning about Causality. Artificial Intelligence, Vol. 24, n° 1-3, December 1984.

Kuipers, B. (1986). Qualitative Simulation. Artificial Intelligence Vol. 29, n° 3, 1986.

Lancaster, K. (1966). The Solution of Comparative Static Problems. Quaterly Journal of Economics, Vol. 80, 1966, 278-295.

Raiman, O. (1986). Order of Magnitude Reasoning. Proceedings of the Fifth National Conference on Artificial Intelligence AAAI, 1986.

Ritschard, G. (1983). Computable Qualitative Comparative Static Techniques. Econometrica, Vol. 51, n° 4, 1983, 1145-1168.

Struss, P. (1987). Mathematical Aspects of Qualitative Reasoning. First Qualitative Physics Workshop, Urbana-Champain, Ill., May 1987.

Travé, L., and E. Kaszkurewicz (1986a). Qualitative Controllability and Observability of Linear Dynamical Systems. Proceedings of the IFAC/IFORS symposium in Large Scale Systems, Zürich, Switzerland, 1986.

Travé, L., and E. Kaszkurewicz (1986b). Qualitative Solutions of Linear Homogeneous Systems. Internal Report LAAS # 86139, Toulouse, France, 1986.

Travé, L., and J.L. Dormoy (1988). Qualitative Calculus and Applications. The 12th IMACS World Congress, Paris, 1988.